

УДК 517.9

І. Габрусєва

(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЯДРА ЯКИХ МІСТЯТЬ ФУНКЦІЇ БЕССЕЛЯ

При розв'язанні деяких задач математичної фізики, зокрема осесиметричних задач теорії пружності та термопружності, виникає необхідність в побудові розв'язків системи парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \eta [F_1(\eta)\varphi(\eta) + F_2(\eta)\psi(\eta)] J_0(\rho\eta) d\eta = f_1(\rho), & a \leq \rho \leq b; \\ \int_0^\infty \eta [F_3(\eta)\varphi(\eta) + F_4(\eta)\psi(\eta)] J_0(\rho\eta) d\eta = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \rho > b; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \eta [\Phi_1(\eta)\varphi(\eta) + \Phi_2(\eta)\psi(\eta)] J_0(\rho\eta) d\eta = f_2(\rho), & c \leq \rho \leq d; \\ \int_0^\infty \eta [\Phi_3(\eta)\varphi(\eta) + \Phi_4(\eta)\psi(\eta)] J_0(\rho\eta) d\eta = 0, & 0 \leq \rho \leq c, \rho > d. \end{cases} \quad (2)$$

У співвідношеннях (1) та (2) $F_i(\eta)$, $\Phi_i(\eta)$ та $f_i(\rho)$ – відомі функції, $\varphi(\eta)$ та $\psi(\eta)$ – невідомі, $J_0(\rho\eta)$ – функція Бесселя 1-го роду. Продовживши другі співвідношення (1) та (2) на усю додатну піввісь функціями $x(\rho)$ та $y(\rho)$ відповідно і застосувавши до одержаних співвідношень формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, одержується система алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\varphi(\eta)$ та $\psi(\eta)$. Після її розв'язання матимемо:

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\Delta(\eta)} [X(\eta)\Phi_4(\eta) - Y(\eta)F_4(\eta)], \quad \psi(\eta) = \frac{1}{\Delta(\eta)} [Y(\eta)F_3(\eta) - X(\eta)\Phi_3(\eta)], \quad (3)$$

де $\Delta(\eta) = \Phi_4(\eta)F_3(\eta) - \Phi_3(\eta)F_4(\eta)$,

$$X(\eta) = \int_a^b \rho x(\rho) J_0(\rho\eta) d\rho, \quad Y(\eta) = \int_c^d \rho y(\rho) J_0(\rho\eta) d\rho.$$

Функції $x(\rho)$ та $y(\rho)$ доцільно вибирати у вигляді:

$$x(\rho) = \sum_{n=1}^N a_n \left[J_0\left(\frac{\rho\lambda_n}{a}\right) N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) N_0\left(\frac{\rho\lambda_n}{a}\right) \right], \quad (4)$$

$$y(\rho) = \sum_{n=1}^N b_n \left[J_0\left(\frac{\rho\gamma_n}{c}\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{\rho\gamma_n}{c}\right) \right], \quad (5)$$

$$J_0\left(\frac{d}{c}\gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{d}{c}\gamma_n\right) = 0, \quad J_0\left(\frac{b}{a}\lambda_n\right) N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) N_0\left(\frac{b}{a}\lambda_n\right) = 0,$$

де a_n та b_n – невідомі коефіцієнти.

Таким чином, для функцій $\varphi(\eta)$ та $\psi(\eta)$, що визначаються рівностями (3), автоматично виконуватимуться перші співвідношення (1) та (2). Підставимо вирази (3), (4) та (5) у другі співвідношення (1) та (2), і помножимо їх ліву та праву частини на $\rho J_0(\rho\lambda_n)$ та $\rho J_0(\rho\gamma_n)$ відповідно. Після інтегрування одержаних виразів по відрізках $[a, b]$ та $[c, d]$ відповідно, отримуємо систему відносно невідомих a_n та b_n .