УДК 621.791.927.7

О. Шаблій, Ч. Пулька, Л. Цимбалюк, О. Король, Б. Береженко
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

МАТИМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ РУХУ РОЗПЛАВЛЕНОГО МЕТАЛУ В ТЕХНОЛОГІЧНОМУ ТИГЕЛІ

Розроблена математична модель формування швидкостей руху розплавленого металу в технологічному тигелі створених пондемоторними силами, після досягнення в ньому початкових і технологічних умов необхідних при відновленні зношених залізничних коліс. Рух розплавленого металу в технологічному тиглі, що сконструйований навколо підготовленого зношеного колеса, описується рівняннями Нав'є-Стокса, які мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P_x}{\partial x} + \upsilon\left(\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right) + \left(\dfrac{\xi}{\rho} + \dfrac{\upsilon}{3}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \dfrac{Q_x}{\rho}; \\ \dfrac{dV_z}{dt} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P_z}{\partial z} + \upsilon\left(\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) + \left(\dfrac{\xi}{\rho} + \dfrac{\upsilon}{3}\right)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \dfrac{Q_z(x)}{\rho}. \end{cases} \tag{1}$$

де Q_x і Q_z – проекції пондемоторної сили на осі x і z.

З допомогою системи рівнянь (1) отримаємо вирази проінтегровані по часу:

$$V_x = V_x^0 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{P}_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\tilde{Q}_x(x); V_z = V_z^0 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{P}_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\tilde{Q}_z(x) - gt. \tag{2}$$

Важливо описати початкове положення (початкових стаціонарних) систем (1) в такій формі, щоб в початковий момент часу виконувалися такі рівняння стану і сумісності:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = 0; \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0; \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Після задоволення рівнянь (3) з допомогою виразів (2) одержимо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{P}_z}{\partial z^2} = \frac{\partial \tilde{Q}_x(x)}{\partial x}; \tag{4}$$

Щоб знайти швидкість за формулами (2) потрібно знайти розвязок останього рівняння (4), який має вигляд:

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_x = \tilde{P}_0 + \tilde{B}x^2; \tilde{P}_0 = (C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)(C_3 e^{nz} + C_4 e^{-nz})t; \\ &\tilde{P}_z = \tilde{P}_0 + \tilde{B}_1 z^2; \tilde{P}_0 = (C_5 \cos nx + C_6 \sin nx)(C_7 e^{nz} + C_8 e^{-nz})t. \end{aligned} \tag{5}$$

Тоді розв'язок рівняння Нав'є-Стокса (2) буде мати вигляд:

$$\rho V_x = \rho V_x^0 - nt\cos nx\left(C_2 C_3 e^{nz} + C_2 C_4 e^{-nz}\right) + \left[Q_x(x) - \frac{x}{b}\left(Q_x(b) - Q_x(0)\right)\right]t; \tag{6}$$

$$\rho V_z = \rho V_z^0 + te^{-nz} n\left(C_5 C_8 \cos nx + C_6 C_8 \sin nx\right) + \left[Q_z(x) - \frac{z}{b}\left(Q_x(b) - Q_x(0)\right)\right]t - g\rho t. \tag{7}$$

З допомогою формул (6) та (7) без початкових значень і граничних умов одержимо наступних чотири рівняння для визначення постійних, визначивши сталі та підставивши їх в (6) та (7) отримаємо:

$$V_x = V_x^0 - \frac{(\cos nx(-Q_x(0)) + Q_x(x) - \frac{x}{b}\left(Q_x(b) - Q_x(0)\right))t}{\rho}; V_z = V_z^0 + \frac{\left(\frac{a}{b}\frac{\left(Q_x(b) - Q_x(0)\right)}{(1 - e^{-na})}(1 - e^{-nz}) - \frac{z}{b}\left(Q_x(b) - Q_x(0)\right)\right)t}{\rho} \tag{8}$$

Значення швидкості залежать від граничних умов і при різних умовах вони будуть різні, це дає можливість оптимізації початкових умов.