

## ІНТЕРВАЛИ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА МОЖЛИВІСТЬ ЗНАХОДЖЕННЯ НА ЛЮБОМУ ІЗ НИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

Відомо, що система тригонометричних функцій  $1, \cos nt, \sin nt, n=1,2,\dots$ , є ортогональною на довільному інтервалі  $[t_0, t_0+2\pi]$  довжиною  $2\pi$ . Це є підставою того, щоб для періодичних з періодом  $2\pi$  функцій визначити коефіцієнти їх рядів Фур'є, використовуючи для цього значення функцій на любому із таких інтервалів.

Суттєво іншою є ситуація для функцій із змінним періодом. В [1] було показано, що для функцій  $\sin t^\alpha, \cos t^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ , їх змінний період  $T(t) = -t + (t^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ . Відповідна система функцій  $1, \cos nt^\alpha, \sin nt^\alpha, n=1,2,\dots$  є ортогональною з ваговою функцією  $t^{\alpha-1}$  на кожному інтервалі  $[t_0, t_0 + T(t_0)]$ , довжина якого вже є змінною і в кожній точці визначається значенням періоду  $T(t_0)$ . Звідси виходить, що для функцій із змінним періодом

$T(t) = -t + (t^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$  теж можна знаходити коефіцієнти їх рядів Фур'є

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt^\alpha + b_n \sin nt^\alpha$ , використовуючи для цього формули

$$a_n = \frac{\alpha}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} t^{\alpha-1} f(t) \cos nt^\alpha dt, n=0,1,\dots; \quad b_n = \frac{\alpha}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} t^{\alpha-1} f(t) \sin nt^\alpha dt, n=1,2,\dots \quad (1)$$

Перевіримо це твердження чисельним методом. Для цього розглянемо функцію у вигляді скінченного ряду Фур'є  $f(t) = 2 \sin t^2 + 0.4167 \sin 3t^2 + 0.0910 \sin 5t^2$ , змінний період якої  $T(t) = -t + (t^2 + 2\pi)^{1/2}$ . Виберемо дві довільні точки, наприклад,  $t_1 = 1, t_2 = 5$ . Оскільки  $T(1) = 1.69815, T(5) = 0.59285$ , то інтервали ортогональності тригонометричної системи  $1, \cos nt^2, \sin nt^2, n=1,2,\dots$ , відповідно рівні  $[1; 2.69815], [5; 5.59285]$ . Обчислені згідно (1) значення коефіцієнтів Фур'є для заданої функції наведені в таблиці.

Інтервали ортогональності	Коефіцієнти Фур'є										
	$a_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$	$b_3$	$a_4$	$b_4$	$a_5$	$b_5$
[1; 2.69815]	0.001	0.0009	1.9986	0.0007	0.001	0.001	0.4164	0.001	0.001	0.0005	0.0925
[5; 5.59285]	0.0005	0.0005	1.9999	0.0005	0.0001	0.0005	0.4165	0.0004	0.0003	0.0003	0.0906

Аналіз результатів обчислень підтверджує можливість знаходження для періодичних функцій із змінним періодом їх коефіцієнтів Фур'є, використовуючи для цього значення функції на довільному інтервалі ортогональності  $[t_0, t_0 + T(t_0)]$ .

### Література

1. Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функцій із змінним періодом // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007.